**FUNGSI TRANSENDEN**

**Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritma**

**1 Fungsi Eksponensial**

Dalam matematika didefinisikan ax dengan a > 0 dan x adalah bilangan rasional. Bagaimana bila kita membahas pangkat yang irasional. misalnya atau . Hal ini dapat kita atasi dengan menjabarkannya pada domain yang lebih luas lagi. Yaitu dengan memanfaatkan fungsi untuk semua bilangan riil. Misalnya untuk menghitung , kita gunakan aproksimasi untuk nilai . Kita telah ketahui bahwa ≈1,73205….. . Sehingga kita dapat memperoleh aproksimasi nilai dengan menghitung

Dengan cara tersebut kita dapat memperoleh nilai aproksimasi dari , yaitu

Dengan cara yang sama kita dapat menghitung untuk semua bilangan riil. Gambar 1 dibawah memperlihatkan fungsi untuk semua bilangan riil

Gambar 1. untuk semua bilangan rasional

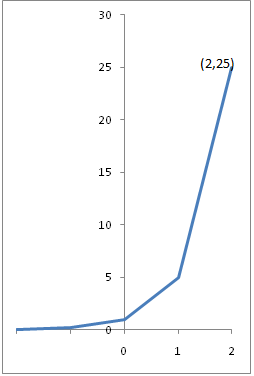
Sekarang kita akan coba latihan dengan bentuk fungsi yang lain, yaitu membuat grafik untuk fungsi-fungsi berikut : a. dan b.

Kita peroleh bentuk grafiknya adalah sebgai berikut:

Gambar 2 a. dan b. untuk semua bilangan rasional

Latihan :

1. Tentukan fungsi eksponensial berdasarkan gambar berikut



1. Buatlah sketsa grafik dari fungsi-fungsi berikut:
2. b.

**1.2 Fungsi Eksponensial Asli *(Natural Eksponensial Function)***

Suatu bilangan positf dapat digunakan sebagai basis pada sebuah fungsi eksponensial. Sebuah bilangan natural yang sangat penting dan banyak diginakan dalam aplikasi dunia nyata adalah bilangan yang biasa dituliskan dengan simbol e. Bilangan e ini didefinisikan sebagai sebagai nilai dari yang diaproksimasi ketika nilai n semakin besar. Aprksimasi hingga 20 desimal menghasilkan nilai e sebagai berikiut :

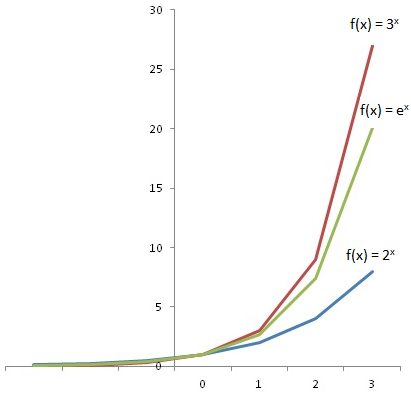
e ≈ 2.71828182845904523536

Terlihat bahwa e adalah bilangan irasional karena kita tidak mngetahui nilai pastinya berapa.

**Fungsi eksponensial asli adalah fungsi eksponen dari**

**Dengan e adalah basis dari fungsi tersebut.**

Karena 2 < e < 3 grafika dari fungsi eksponensial asli berada diantara fungsi dan fungsi seperti diperlihatkan pada gambar di bawah ini.

****

**.** Gambar 3. untuk semua bilangan rasional

Contoh :

**Populasi yang memperlihatkan pertumbuhan eksponensial bertambah diketahui mengikuti formula berikut ini**

**dimana :**

**n(t) = popuplasi pada saat t**

**n0 = jumlah populasi awal**

**r = nilai rata-rata pertumbuhan relative (diekspresikan sebagai proporsi dari populasi)**

**t = waktu**

Jumlah awal bakteri yang ditempatkan pada suatu wadah oleh seorang biologist adalah 500 buah. Kemudian ia membuat perhitungan sampel bakteri tersebut dan menemukan bahwa pertumbuhan relatifnya adalah 40% per jam.

1. Carilah formula untuk jumlah bakteri setelah t jam.
2. Berapa estimasi perhitungan setelah 10 jam?
3. Sketsakan grafiknya sebagai fungsi dari n(t)

Jawab :

1. Dengan menggunakan formula pertumbuhan bakteri secara eksponensial dengan jumlah awal n0 = 500 dan r = 0,4, maka kta peroleh

dengan t diukur dalam jam.

1. Dengan menggunakan formula dari a., kita peroleh jumlah bakteri yang terhitung setelah 10 jam adalah

buah.

1. Plot grafik pertumbuhan bakteri selama 10 jam diperlihatkan pada gambar berikut ini

Latihan Soal :

1. Buatlah sketsa grafik dari fungsi-fungsi dibawah ini :





8. Jumlah bakteri dalam suatu wadah diberikan oleh persamaan beriku

dimana t dihitung dalam jam.

1. Berapa pertumbuhan relative dari populasi bakteri dalam wadah ? Ekspresikan jawaban anda dalam persen.
2. Berapa jumlah populasi awal bakteri.
3. Berapa jumlah populasi bakeri setelah 5 jam.
4. Jumlah populasi tikus di suatu kota diberikan oleh persamaan berikut ini

Dimana t dihitung dalam tahun sejak tahun 1990 dan n(t) dihitung dalam juta.

1. Berapa pertumbuhan relative dari populasi bakteri dalam wadah ? Ekspresikan jawaban anda dalam persen.
2. Berapa populasis tikus di kota tersebut pada tahun 1990
3. Berapa perkiraan jumlah populasi tikus di kota tersebut pada tahun 2000
4. Sketsakan grafik populasi tikus sebagai fungsi dari waktu.
5. **Fungsi Logaritma**

Setiap fungsi eksponensial dengan a≠ 0 dan a > 1 memiliki fungsi invers. Fungsi invers dari fungsi eksponensial ini disebut fungsi logaritma, dengan basis a dan biasa ditulis dengan lambing . Telah kita ketahui bersama bahwa fungsi invers didefinisikan sebagai,

↔

Maka fungsi logaritma dapat didefinisikan sebagai berikut

**Misalkan a adalah sebuah bilangan positif dengan a≠1, sebuah fungsi logarithma dengan basis a, dan ditandadai dengan lambing log, didefinisikan sebagai**

**Bentuk logaritma dan eksponensial dibedakan seperti pada table berikut**

|  |  |
| --- | --- |
| Bentuk logaritma | Bentuk Eksponensial |
|  |  |

**2.1 Bentuk Grafik Fungsi Logaritma**

Bentuk dari dari grafik fungsi logaritma adalah cermin dari bentuk grafik fungsi eksponensial, karena telah kita ketahui sebelumnya bahwa fungsi logaritma adalah invers dari fungsi eksponensial.

Contoh : Buatlah sketsa dari grafik

Jawab :

Latihan :

Buatlah sketsa grafik untuk fungsi-fungsi berikut: a. , b.

c. d. . Buatlah semua sketsa terbeut dalam satu grafik.

**2.1** **Logaritma Biasa**

Logaritma biasa adalah log dengan basis 10, seperti misalnya 100=102, maka log10 100=2. Dalam logaritma biasa, penulisan basis 10 biasanya dihilangkan. Jadi untuk logaritma biasa tertulis hanya log saja. Sedangkan untuk basis yang lain, nilai basis dalam penulisan log-nya tetap harus dicantumkan.

**Jadi, logaritma dalam basis 10 disebut logaritma biasa dan dituliskan dalam bentuk**

**2.3 Logaritma Asli (Natural Logarithm)**

Logaritma natural sangat penting dan banyak digunakan dalam bidang sains dan keteknikan.

**Logaritma natural adalah logaritma dengan basis bilangan natural e, dan dilambangkan dengan notasi ln.**

**Jadi,**

Logaritma natural ini adalah fungsi invers dari fungsi eksponensial . Dimana

Dan grafik dari fungsi eksponensial natural dan fungsi logaritma natural didekati oleh grafik berikut ini,

Sifat-sifat logaritma natural adalah sebagai berikut

**2.4 Aturan Logaritma**

Karena logaritma adalah bilangan pangkat basis yang diberikan, aturan logaritma sangat mirip dengan aturan pangkat

Bukti :

* Misalkan dan , maka ketika kita tuliskan dalam bentuk eksponensial kedua bentuk logaritma diatas menjadi dan   
  , sehngga
* , maka
* Misalkan , maka , sehingga

Latihan :

Manfaatkan aturan logaritma untuk menguraikan ekspresi logaritma berikut ini:

1. Ekspresikan log (x+1) sebagai bentuk logaritma tunggal

**2.5 Perubahan basis**

Untuk keperluan tertentu, kadangkala kita perlu melakukan perubahan basis logaritma dari satu basis ke basis yang lainnya. Sebagai contoh andaikata kita ingin merubah ke .

Sekarang misal,

Kemudan kita tuliskan bentuk persamaan diatas kedalam bentuk eksponensial, dan kemudian ambil logaritmanya dari kedua belah sisi,

Jadi kita sekarang memiliki formula,

Contoh:

Dengan memanfaatkan formula perubahan basis lograitma diatas kita dapat mengevaluasi nilai logaritma berikut ini ; a.

Jawab : Dengan basis b = 8 dan a=5, maka

**Diferensial dan Integral Dari**

**Fungsi Eksponensial dan Fungsi Logaritmik**

* 1. **Turunan Fungsi Eksponen Asli (Natural)**

Karena e dan ln adalah fungsi-fungsi yang saling berbalikan, maka menurut aturan dalam fungsi invers yaitu, maka fungsi eksplonensial dapat diturunkan.

Misalkan , maka

,

kemudian kita turunkan kedua ruas persamaan diatas terhadap x, diperoleh

sehingga,

Dengan demikian turunan dari ex adalah ex itu sendiri.

Apabila , maka dari aturan rantai

Contoh

1. Tentutukan turunan dari fungsi

Jawab:

1. Tentukan turunan dari fungsi berikut

Jawab:

* 1. **Integral Fungsi Eksponen Asli (Natural)**

Integral dari fungsi eksponensial asli didefinisikan sebagai berikut;

**Apabila , maka**

Contoh:

1. Tentukan

Jawab: Andaikan maka

1. Tentukan

Jawab : Andaikan , maka

Maka,

* 1. **Diferensial Fungsi Logaritma Asli**

Fungsi logaritma asli, dituliskan sebagai ln, didefinisikan sebagai

**Telah kita ketahui bahwa turunan suatu integral terhadap batas atasnya adalah pengevaluasian integran tersebut di batas atas. Maka**

**Sehingga berdasarkan aturan rantai, dan andaikan , maka apabla f dapat diturunkan, kita peroleh**

Contoh :

1, Tentukan

Jawab : Andaikan , maka

1. Tentukan

Turunan fungsi diatas ada apabila, . Oleh karena , yang positif apabila atau . Sehingga dearah definisi fungsi adalah . Pada aerah ini berlakulah,

* 1. **Integral Fungsi Logaritma Asli**

Perhatikan fungsi berikut ini

Ada dua kasus untuk penyelesaian fungsi diatas, yaitu:

1. Apabila , maka , sehingga
2. Apabila , maka, sehingga

Maka kita peroleh ungkapan,

Sehingga,

**Apabila , maka**

Contoh :

1. Tentukan

Jawab: Misalkan , maka

1. Hitunglah :

Jawab: Misalkan , maka , maka

Menurut teorema kalkulus dasar,

Dengan persaratan bahwa .

* 1. **Turunan dan Integral dari Fungsi Eksponen Umum dan Fungsi Logaritma Umum**

Definisi untuk ax untuk a>0 adalah

Dan

**Sifat-sifat ax adalah sebagai berikut**

**Turunan dan integral dari fungsi eksponen umum didefinisikan sebagai barikut :**

Contoh

1. Tentukan

Jawab : Gunakan aturan rantai dengan memisalkan

Maka

**Sedangkan untuk fungsi logaritma biasa, turunannya didefinisikan sebagai berikut :**

Contoh :

1. Apabila , x>0, tentukan dengan dua cara yang berbeda.

Jawab :

Cara 1 : Kita tulis

Dengan menggunakan Aturan Rantai kita memperoleh

Cara 2 : (Pendiferensialn Logaritma)

1. Hitunglah

Jawab : Misalkan , maka dx. Sehingga,

Dengan menggunakan teorema kalkulus dasar, diperoleh